LA FONCTION LINÉAIRE [1] 33

DEUXIÈME CHAPITRE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE VECTORIELLE

PAR C. C. DASSEN
Docteur es sciences

RÉSUMÉ

La fonction linéaire. — L'auteur étend la représentation graphique qu'il a indiqué au premier chapitre; il considère maintenant, le cas ou les abscisses et les coordonnées sont de nature vectorielles a deux unités capitales; il à, pour celà, besoin de côter les points de l'espace. Il s'occupe de la représentation de la fonction linéaire, du problème de l'intersection de deux droites, de la représentation de quatre points d'un rapport anharmonique donné de nature complexe; il étudie spécialement les rapports harmoniques et equianharmoniques considérant et discutant plusieurs cas particuliers. Il fait, en terminant, une allusion a la formule de Laguerre.

I

GENERALISATION

36. Nous avons supposé, jusqu'a présent, que la valeur de l'argument x était algébrique, ce mot étant pris dans son sens strict [2]. Mais de nombreures questions obligent a considérer le cas d'un argument de nature vectorielle a deux unités [3]. Dans le calcul formel celà signifie que x est — de même que y — un «diplet» ou nombre «complexe», «imaginaire» ou «vectoriel». Pour obtenir une repré-

(1) Mémoire presenté a l'Académie dans sa séance du 18 novembre 1926. Voir le premier chapitre dans *Annales de l'Academie*, tome I, pages 254 et suivantes.

(2) C'est-à-dire, une quantité dirigée suivant l'une ou l'autre de deux directions opposées.

(3) C'est-à-dire, une quantité susceptible d'être dirigée dans un plan.

sentation graphique, il faudrait donc, disposer de quatre dimentions: mais on peut, tout de même, obtenir quelquechose de convenable, en côtant les points de l'espace. Voici comment que nous nous y prendrons.

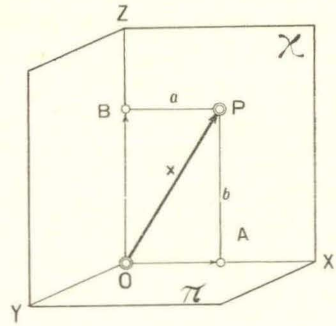

Fig. 13

37. Soient (fig. 13) OXYZ trois axes d'origine O, deux a deux orthogonaux. Le plan de base, π, sera celui de OXY; le plan OXZ, que nous designerons par χ, sera affecté au vecteur x.

Si $x = \overline{OP} = a + bi$, a, sera sa projection $\overline{OA}$ sur OX, et b, sa projection $\overline{OB}$ sur OZ. Nous pourrons donc établir :

$$\overline{OA} = a = X; \qquad \overline{OB} = b = Z.$$

Les quatre vecteurs : $x = 1$, $x = i$, $x = -1$, $x = -i$ correspondent, par conséquent a : $X = 1$, $Z = 1$, $X = -1$, $Z = -1$ (fig. 14).

38. Soit, maintenant, $y = f(x)$, une fonction analytique quelconque y de x, les constantes peuvent être de nature arithmétique, algébrique ou vectorielle a deux unités de la forme $m + ri$. A chaque valeur de

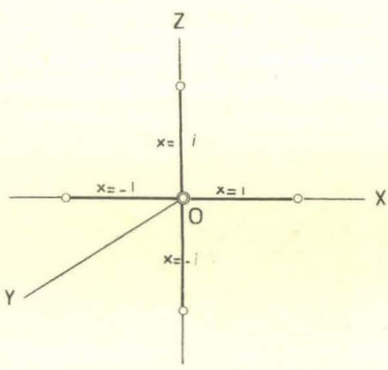

Fig. 14

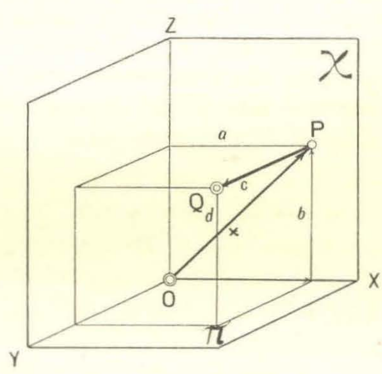

Fig. 15

x correspond une autre valeur (ou un certain nombre d'autres) de y, de la forme $c + di$. Pour la représenter, traçons par le point P, qui correspond a la valeur de l'argument x, la perpendiculaire au plan χ, c'est-à-dire, la parallèle a l'axe des Y, et prenons un segment $\overline{PQ}$ (fig. 15), de valeur c, en tenant compte du signe. Nous aurons, donc, $PQ = c = Y$. Maintenant, pour représenter le vecteur y, il nous faudra côter le point Q, avec la côte d. Si nous designons par V la quatrième dimension qui nous manque, nous pourions écrire : $V = d$. En somme, le point $Q_{(d)}$ représente la valeur $c + di$ de la fonction y, et le lieu de ces points côtés, est une surface côtée, représentative de la fonction y. Vice-versa, si l'on donne un point côté $Q_{(d)}$, ses autres trois coordonnées X, Y, Z sont déterminées, et nous aurons, pour ce point, puisque $V = d$: $x = X + Zi$, $y = Y + = Vi$.

II

LA FONCTION LINÉAIRE

39. Commençons par la fonction linéaire la plus simple

$$y = mx$$

où m est de nature algébrique, au sens indiqué plus haut.

A chaque point P du plan XZ, correspond une valeur de x, car si $a = X$ et $b = Z$, sont les projections du vecteur $\overline{OP}$ sur OX et OZ, nous avons

$$x = a + bi = X + Zi.$$

A cette valeur de l'argument correspond le valeur de la fonction,

$$y = ma + mbi = mX + mZi = Y + Vi.$$

Si (fig. 16) $\overline{PQ} = ma = mX = Y$, et si le point Q est affecté de le côte $V = mb = mZ$; ce point côté représentera le valeur de y correspondante a la valeur considérèe de x. Ainsi, Q est a une distance de Z, m fois plus grande que sa distance au plan OYZ (tenant compte du signe de m), et sa côte est m fois la distance du point au plan de base π.

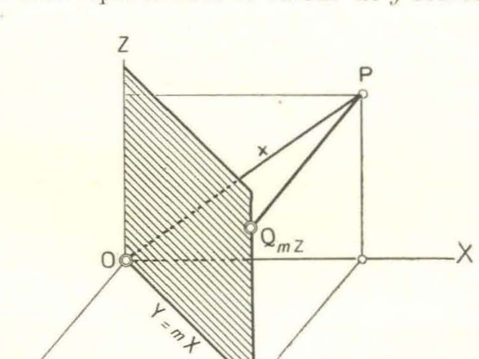

Fig. 16

Le lieu de Q, m étant algébrique, résulte ainsi un plan côté qui contient l'axe des Z et qui est, par conséquent, perpendiculaire au plan de base par la droite $Y = mX$. La côte de chaque point de ce plan est m fois sa distance au plan de base. Les uniques points de ce plan qui ont la côte nulle, sont ceux de la susdite droite $Y = mX$.

40. S'il s'agissait de l'équation

$$y = mx + r$$

m et r étant de nature algébrique, toujours au sens strict (réelles), le plan représentatif contiendrait la droite

$$Y = mX + r$$

du plan de base et continuerait a lui être perpendiculaire; la côte de chaque point serait également m fois sa distance a π.

41. En général si l'on a

$$y = (m + pi)\,x + (n + si)$$

c'est-à-dire,

$$y = (m + pi)\,(a + bi) + n + si,$$

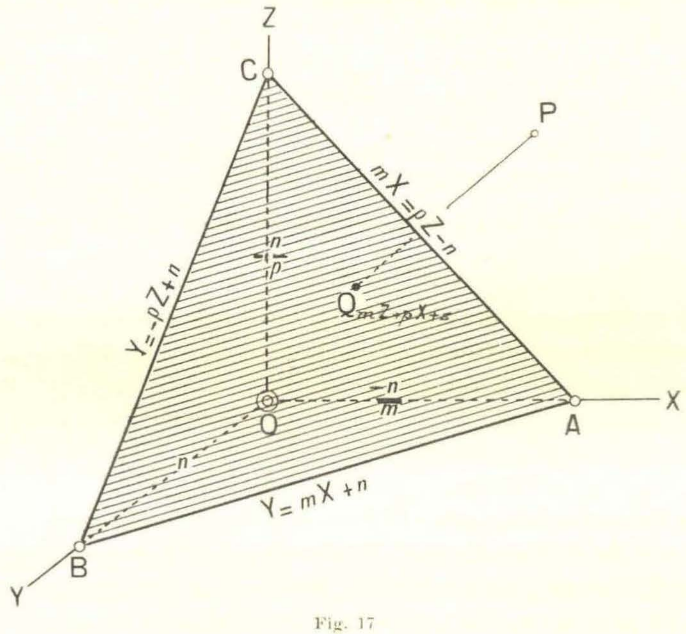

Fig. 17

pour une valeur déterminée de $x = a + bi$ (point P, fig. 17), il résulte :

$$y = (ma - bp + n) + (mb + pa + s)\,i$$

ce qui représente un point Q de cordonnées

$$X = a, \qquad Y = ma - bp + n, \qquad Z = b,$$

et de côte

$$V = mb + pa + s.$$

Le lieu de Q est un plan côté. L'équation de ce plan dans le système OXYZ est

$$Y = mX - pZ + n \text{ (fig. 17)}. \qquad (1)$$

42. Quant à la côte d'un point dont les coordonnées sont X, Z, elle a pour valeur

$$V = mZ + pX + s. \qquad (2)$$

Les points de ce plan qui ont la côte nulle remplissent, par conséquent, la condition :

$$mZ + pX + s = o,$$

qui représente un plan perpendiculaire au plan des XZ par la droite $pX + mZ + s$ de ce dernier.

Les points cherchés sont ceux de la droite intersection du dit plan, avec le plan côté. Celui-ci coupe les trois axes OX, OY, OZ à des distances (fig. 17) :

$$OA = -\frac{n}{m}; \qquad OB = n; \qquad OC = -\frac{n}{p}. \qquad (3)$$

43. Si on ne considère que des valeurs «réelles» de x, comme nous l'avons fait dans le premier chapitre, on peut employer la troisième dimention pour les valeurs «imaginaires» de y: alors le lieu

$$y = mx$$

ou m a la forme $m = M + Pi$ est représenté par une droite de l'espace dont la projection sur le plan de base est la droite $y = Mx$, et qui fait avec celle dernière un angle α, tel que :

$$\text{tang } \alpha = \frac{N}{M}.$$

Si m es «réel» c'est-à-dire si $P = o$, la droite est «réelle»: c'est la droite $y = Mx$ du plan de base. Si $m = \pm i$, c'est-à-dire si l'on a $M = o$, $P = \pm 1$, il s'agirait, évidemment, des droites isotropes qui se trouvent représentées par les bissectrices des angles ZOX.

III

INTERSECTION DE DEUX DROITES

44. Si les droites en question ont pour équations :

$$y = m_1 x + p_1, \qquad y = m_2 x + p_2 \text{ (fig. 18)}.$$

où les constantes sont «réelles», leur intersection appartient, d'après ce qui a été expliqué plus haut (n^{os} 39 et 40) à la droite côtée parallèle a l'axe de Z, par l'intersection J des deux droites du plan de base

$$Y = m_1X + p_1, \qquad Y = m_2X + p_2.$$

Ce sera le point I de cette droite que a même côte pour les deux plans; c'est-à-dire, tel que

$$V = m_1Z = m_2Z$$

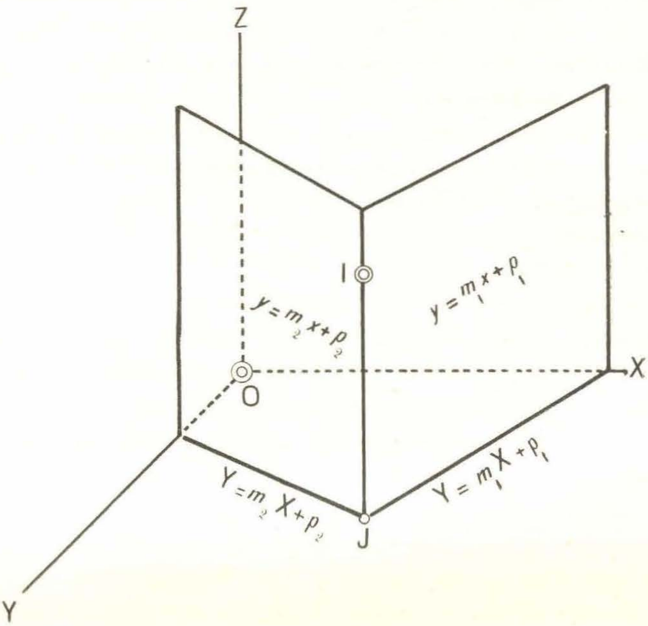

Fig. 18

ce qui ne peut arriver que pour le point J de π, quand m_1 et m_2 sont différents.

45. Dans le cas général, on aurait :

$$\left.\begin{aligned} y &= (m_1 + p_1 i)\, x + (n_1 + s_1 i) \\ y &= (m_2 + p_2 i)\, x + (n_2 + s_2 i). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Le point d'intersection de ces deux lieux est celui de la droite, intersection des deux plans côtés représentatifs de chacune de ces deux droites vectorielles (fig. 17), qui a même côte dans l'un et dans l'autre.

Nous aurons, ainsi, la condition :

$$m_1Z + p_1X + s_1 = m_2Z + p_2X + s_2.$$

C'est-à-dire,

$$(p_1 - p_2) X + (m_1 - m_2) Z + (s_1 - s_2 = 0. \qquad (5)$$

La resolution du système (1), (2) et (5), soit analytique, soit graphique par les procédés de le géometrie descriptive, n'offre aucune difficulté.

46. Quand les équations contiennent des coefficients, des paramètres, ou des constantes en général, de la forme $k + li$; c'est-à-dire, quand ces constantes sont des «diplets» ou «nombres vectoriels», alors, même avec des valeurs algébriques de la variable, on se trouve devoir, dès le début, entrer de plein pied dans le calcul vectoriel, tandis que notre idée première était, au contraire, de nous occuper de fonctions entièrement algébriques et de chercher les solutions vectorielles des variables quand le système n'admettait pas de représentation dans le plan de base; ou, si l'on préfère, de donner une interprétation hors de ce plan, a certaines solutions qui sont «imaginaires» relativement au plan de base.

La raison d'être de cette observation est que les valeurs X, Y, Z, V ont, forcément, dans notre étude, un caractère algébrique au sens strict; elles ne pourraient, en effet, prendre elles aussi la nature vectorielle. Si cela arrivait, il faudrait, analytiquement, en déduire que le problème initial n'a pas de solution, ni dans le plan de base ni hors de ce plan, dans l'espace tridimentionnel côté, c'est-à-dire, ni pour des valeurs «réelles» ni pour des valeurs «imaginaires» ou «vectorielles» de ces variables. Il est du reste évident que les surfaces ou le lignes côtées obtenues au moyen de notre représentation dans le système OXYZ, peuvent ne pas se couper, ou ne pas admettre en général de solutions communes, de même que celà peut arriver dans le plan de base avec le lignes qui y sont tracées.

47. Cependant, tant qu'il ne s'agira que de fonctions linéaires, cela n'aura pas lieu, car la les surfaces représentatives (des plans) se couperont toujours, au fini ou à l'infini, et l'on pourra trouver un point appartenant a cette intersection qui aura même côte dans l'un et dans l'autre plan. Mais il n'en sera pas de même lorsque la fonction sera de degré plus élevé, comme nous le verrons quand nous traiterons, par exemple, le problème de l'intersection d'une circonférence analytique avec une droite également analytique, dont les constantes sont des nombres vectoriels ou «diplets» $(k + li)$.

48. Nous terminerons ce chapitre en résolvant d'un problème numérique relatif a l'intersection de deux droites.

Cherchons l'intersection des lieux

$$y = (-7 + 2i)x + (15 - 23i)$$

$$y = (-2 + i)x + (7 + 9i).$$

Nous avons, dans ce cas :

$$m_1 = 7, \qquad p_1 = 2, \qquad n_1 = 15, \qquad s_1 = 23,$$

$$m_2 = -2, \qquad p_2 = 1, \qquad n_2 = 7, \qquad s_2 = 9.$$

Les système a résoudre par rapport aux axes OX, OY, OZ est :

$$Y = -7X - 2Z + 15, \quad Y = -2X - Z + 7, \quad X - 5Z + 14 = 0,$$

on en tire :

$$X = 1, \qquad Y = 2, \qquad Z = 3.$$

La côte V du point d'intersection s'obtient au moyen de l'une ou l'autre de équations :

$$V = 2X - 7Z + 23, \qquad V = X - 2Z + 9.$$

Il en résulte

$$V = 4.$$

49. Le même problème à été graphiquement résolu dans le figure 19 par les procédés de la Géometrie Descriptive (méthode de Monge).

Dans cette épure, XX représente la ligne de terre, O est l'origine des coordonnées; les trois axes sont représentés par OX, OY, OZ. Le plan

$$Y = -7X - 2Z + 15$$

a pour traces les droites A_1B_1, A_1C_1, qui satisfont aux rapports

$$OA_1 = \frac{15}{7}, \qquad OB_1 = 15, \qquad OC_1 = \frac{15}{2}.$$

Le plan

$$Y = -2X - Z + 7$$

a pour traces, A_2B_2, A_2C_2 qui satisfont à

$$OA_2 = \frac{7}{2}, \qquad OB_2 = 7, \qquad OC_2 = 7.$$

Le plan

$$X - 5Z + 14 = 0,$$

est perpendiculaire au plan orthographique; et l'on a :

$$OA_3 = -14, \qquad OC_3 = \frac{14}{5}.$$

L'intersection de ces trois plans, est le point $P = (P_1, P_2)$. On trouve

$$X = OP_0 = 1, \qquad Y = P_0P_1 = 2, \qquad Z = P_0P_2 = 3.$$

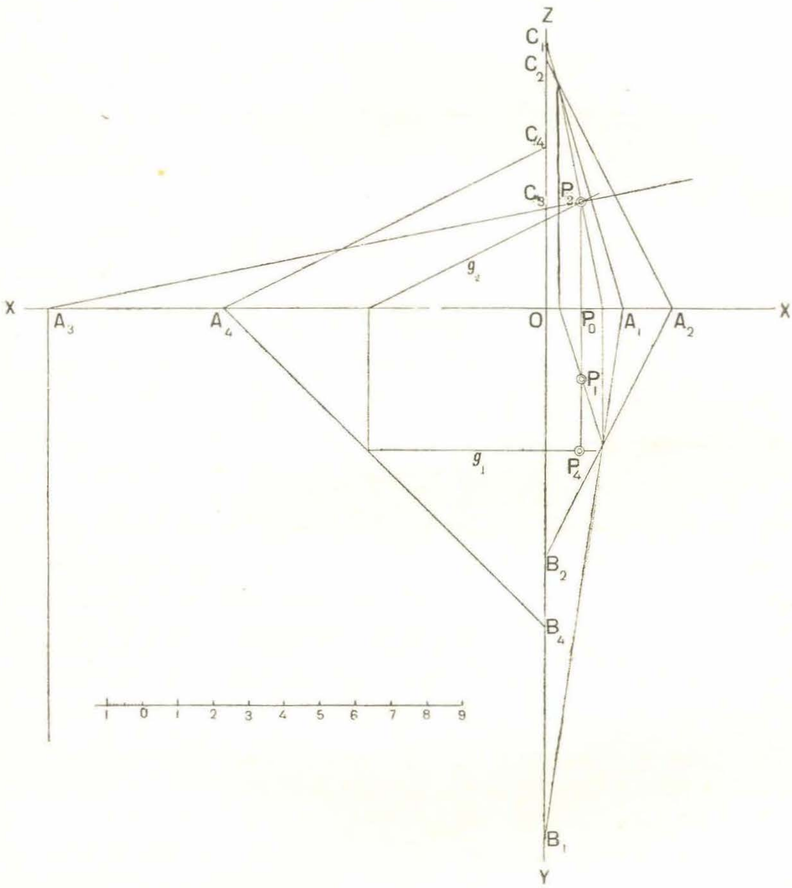

Fig. 19

Pour trouver V, nous considérerons le plan

$$V = X - 2Z + 9.$$

Pour abréger, considérons l'axe OY comme étant, a présent, l'axe OY. Les traces du plan en question sont A_4B_4 et A_4C_4. L'on a

$$OA_4 = -9, \qquad OB_4 = 9, \qquad OC_4 = 4,5.$$

Du moment que le point trouvé (P_1P_2) a pour coordonnées $X = 1$, $Z = 3$, sa projection sur ce plan XOZ, est P_2, de sorte que pour trouver V, il suffira de tracer par P_2, la génératrice (g_2, g_1) du plan. On obtient ainsi l'autre projection, P_4, sur le plan XOV; la côte cherchée est

$$P_0P_4 = 4.$$

IV

REPRESENTATION DE QUATRE POINTS DONT LE RAPPORT ANHARMONIQUE EST DE NATURE VECTORIELLE

a) Cas général

50. Considérons, de nouveau, le lieu représenté par l'équation linéaire

$$y = mx + n \tag{6}$$

dans laquelle

$$x = X + Zi$$

$$m = p + qi;$$

on aura, ainsi,

$$y = Y + iV$$

où

$$Y = pX + qZ + n, \qquad V = qX + pZ,$$

et nous avons vu que le lieu représentatif de y, est un plan côté (n° 42, fig. 17).

51. Si deux points A et B dont le coordonnés sont x_1, y_1; x_2, y_2 appartiennent a ce lieu, on sait, et l'on peut aisément le démontrer en exécutant les calculs, qu'un point quelconque P dont les coordonnées sont

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{7}$$

appartient aussi a ce même lieu, quelle que soit la valeur et la nature de λ (algébrique ou vectorielle a deux unités).

Or, il résulte de ces calculs que si

$$x_3 = X_3 + Z_3 i, \qquad y_3 = Y_3 + V_3 i,$$

on a

$$X_3 = \frac{X_1 + \lambda X_2}{1 + \lambda}, \qquad Y_3 = \frac{Y_1 + \lambda Y_2}{1 + \lambda},$$

$$Z_3 = \frac{Z_1 + \lambda Z_2}{1 + \lambda}, \qquad V = \frac{V_1 + \lambda V_2}{1 + \lambda},$$

ce qui fait voir que, quand λ est un nombre algébrique au sens strict (nombre «qualifié» ou «réel»); le point qui représente P appartient a la ligne droite de l'espace qui joint les points représentatifs de A et B, et nous savons, en outre, que λ indique le rapport des segments $\overline{PA}$ et $\overline{PB}$ $\left(\lambda = \frac{PA}{PB}\right)$. Les points A et B se trouveront sur le plan de base quand on aura $Z = V = 0$, c'est-à-dire $q = 0$; mais alors P appartiendra aussi a π, et λ est le rapport des «distances» de P a A et a B, se terme étant pris dans son sens ordinaire ou intuitif. Si λ es un «diplet», P ne se trouvera plus dans le plan de base, A et B y étant, mais il se trouvera dans le plan perpendiculaire a π par la ligne droite $Y = pX + n$ qui joint A et B.

52. Considérons maintenant quatre points A, B, P, Q, du lieu (6) pris dans l'ordre indiqué, et supposons que leurs coordonnées soient :

$$x_1, y_1; \qquad x_2, y_2; \qquad \frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda_1}, \frac{y_1 + \lambda_1 y_2}{1 + \lambda_1}; \qquad \frac{x_1 + \lambda_2 x_2}{1 + \lambda_2}, \frac{y_1 + \lambda_2 y_2}{1 + \lambda_2}.$$

Leur rapport anharmonique est, comme l'on sait, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, quelle que soit la nature de λ_1 et de λ_2 (algébrique ou vectorielle a deux unités).

Si, pour abréger, nous désignons par x_3, y_3, x_4, y_4, les coordonnées de P et de Q, il en résultera

$$\lambda_1 = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}, \qquad \lambda_2 = \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} = \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_4};$$

de sorte que le rapport anharmonique de quatre points du lieu (6) dont les coordonnées sont x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, 4$) pris dans cet ordre : 1, 2, 3, 4, peut s'exprimer par

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}, \qquad \text{ou par} \qquad \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2}. \tag{8}$$

53. Et, en général, si l'on considère deux points du lieu dont les coordonnées sont x_a, y_a; x_b, y_b, les coordonnées de quatre autres points du lieu peuvent s'exprimer par les formules

$$x_i = \frac{x_a + \lambda_i x_b}{1 + \lambda_i}, \qquad y_i = \frac{y_a + \lambda_i y_b}{1 + \lambda_i}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{9}$$

et leur rapport anharmonique par

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}. \tag{10}$$

Tirons, en effet, x_a, y_a, x_b, y_b des deux formules (9) que l'on obtient en y faisant $i = 1$, $i = 2$. Il en résulte :

$$x_a = \frac{x_1(1+\lambda_1)\lambda_2 - (1+\lambda_2)\lambda_1 x_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$x_b = \frac{x_1(1+\lambda_1) - (1+\lambda_2)\lambda_2 x_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

(y_a et y_b peuvent s'obtenir en remplaçant, dans les valeurs précédentes x par y). En remplaçant ensuite, dans les formules (9) qui expriment x_3, y_3, x_4, y_4, les valeurs de x_a et y_b ainsi obtenues, on trouve, après quelques transformations,

$$x_3 = \frac{x_1 + \mu_3 x_2}{1+\mu_3}, \qquad y_3 = \frac{y_1 + \mu_3 x_2}{1+\mu_3},$$

μ_3 ayant la valeur

$$\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}.$$

En remplaçant les indices 3, par les indices 4, on obtendrait, de même les valeurs de x_4 et de y_4.

Ainsi, le rapport anharmonique des quatre points est $\frac{\mu_3}{\mu_4}$, c'est-à-dire l'expression (10) [1].

54. En somme, puis qu'il n'y a aucun inconvènient a appliquer la théorie du rapport anharmonique aux points considéres, même pour le cas ou les coordonnées et les constantes sont de nature vectorielle a deux unités, il n'y a, non plus, aucune difficulté a leur appliquer notre représentation graphique.

55. Nous nous occuperons, spécialement, de représenter les quatre points quand leur rapport anharmonique vaut -1, soit quand $\lambda_1 = -\lambda_2$ (rapport harmonique) et quant il vaut $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (rapport equianharmonique).

[1] Si, dans (6), nous posons

$$x_n = X_n + Z_n i \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$$

le rapport (8) peut s'exprimer, après quelques transformations, sous la forme suivante :

$$\frac{(X_3-X_1)(X_3-X_2)+(Z_3-Z_1)(Z_3-Z_2)-[(X_3-X_1)(Z_3-Z_2)-(X_3-X_2)(Z_3-Z_2)]i}{(X_3-X_2)^2+(Z_3-Z_2)^2} :$$

$$\frac{(X_4-X_1)(X_4-X_2)+(Z_4-Z_1)(Z_4-Z_2)-[(X_4-X_1)(Z_4-Z_2)-(X_4-X_2)(Z_4-Z_1)]i}{(X_4-X_2^2)+(Z_4-Z)_2^2}.$$

b) Rapport harmonique

Si les coordonnées des points A et B sont, comme plus haut,

$$x_1, y_1; \qquad x_2, y_2.$$

Celles x_3, y_3; x_4, y_4 des autres deux points, C et D, en relation harmonique avec les premiers, doivent être :

$$\frac{x_1 \pm \lambda x_2}{1 \pm \lambda}, \qquad \frac{y_1 \pm \lambda y_2}{1 \pm \lambda}.$$

Le signe $+$ correspond au point C, et le signe — au point D.

Si on doit passer des points C et D, au points A et B on aura :

$$x_1 = \frac{x_3 + \mu x_4}{1 + \mu}, \qquad y_1 = \frac{y_3 + \mu y_4}{1 + \mu},$$

$$x_2 = \frac{x_3 - \mu x_4}{1 - \mu}, \qquad y_2 = \frac{y_3 - \mu y_4}{1 - \mu},$$

tenant compte des valeurs de x_3, x_4, y_3, y_4 il résulte

$$\mu = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda},$$

et, symétriquement,

$$\lambda = \frac{1 - \mu}{1 + \mu},$$

oú bien

$$\lambda\mu + \lambda + \mu = 1.$$

56. Quelle que soit la valeur et la nature de λ, quand le deux premiers points coïncident, c'est-à-dire si l'on a $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, les autres deux coïncident aussi.

57. Si $\lambda = 0$, le troisième et le quatrième point coïncident avec le premier.

58. Si λ croit sans cesse (quand il s'agit d'un «diplet», c'est-à-dire d'un nombre vectoriel a deux unités, il faudra considérer le croissement de son module), le troisième et le quatrième points tendent sans cesse a coïncider avec le deuxième; car, de l'identité

$$\frac{x_1 \pm \lambda x_2}{1 \pm \lambda} = \frac{\frac{x_1}{\lambda} \pm x_2}{\frac{1}{\lambda} \pm 1},$$

il résulte que si λ est algébrique (vectoriel a une unité), le second membre tend vers x_1 quand λ augmente indéfiniment; est si λ es vectoriel a deux unités, soit, $\lambda = r + si$, comme l'on peut écrire le second membre de l'identité sous la forme

$$\frac{\frac{x_1}{r^2+s^2}(r-si) \pm x_2}{\frac{r-si}{r^2+s^2} \pm 1}.$$

On voit, également, que si le module r^2+s^2 croit indéfiniment, l'expression totale tend vers x_2.

59. Si $\lambda = 1$, nous aurons,

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}, \qquad x_4 = y_4 = \infty.$$

Dans ce cas, si les points A et B appartiennent au plan de base, C est le point milieu du segment $\overline{AB}$, et D est le point impropre (ou a «l'infini») de la ligne droite qui joint A et B.

60. Suppons maintenant que A et B n'appartiennent pas au plan π et que leurs coordonnées soient les diplets,

$$x_1 = X_1 + Z_1 i, \qquad x_2 = X_2 + Z_1 i$$

$$y_1 = Y_1 + V_1 i, \qquad y_2 = Y_2 + V_2 i$$

nous aurons

$$x_3 = \frac{X_1+X_2}{2} + \frac{Z_1+Z_2}{2} i, \qquad y_3 = \frac{Y_1+Y_2}{2} + \frac{V_1+V_2}{2} i.$$

Ce qui signifie que le point du plan des XZ qui a mêmes coordonnées que C, est le point milieu du segment de ligne droite limité par le points de ce plan qui ont pour coordonnées X_1Y_1; X_2Y_2; et ainsi, les point représentatif de C, est le point milieu du segment de ligne droite qui joint, dans l'espace tridimensionnel, les points représentatif de A et B; quant a sa côte, elle est égale a la demi somme des côtes de A et B, ce qui, du reste, est une conséquence de l'observation faite au numero 51 relativement a la signification de λ quand il est de nature algébrique (vectoriel a une unité). Le point D est représenté par le point impropre (ou a «l'infini») de la droite AB de l'espace tridimensionnel; sa côte est infiniment grande.

61. Si $\lambda = i$ et les points A et B appartiennent au plan de base, les coordonnées de C et de D sont :

$$\frac{X_1 \pm X_2 i}{1 \pm i}, \qquad \frac{Y_1 \pm Y_2 i}{1 \pm i}$$

(le signe $+$ por C et le signe $-$ pour D). C'est-à-dire :

$$\frac{X_1 + X_2}{2} \pm \frac{X_1 - X_2}{2} i, \qquad \frac{Y_1 + Y_2}{2} \pm \frac{Y_1 - Y_2}{2} i.$$

De sorte que les points C et D sont représentés par les points C′ et D′ de la perpendiculaire au plan de base tracée par le point milieu M (fig. 20) du segment $\overline{AB}$, et situés a une distance, d'un côté et de l'autre de π, égale a $\frac{X_1 - X_2}{2} = \frac{\overline{RS}}{2}$ (R et S étant les points de l'axe OX d'abscisses X_1 et X_2).

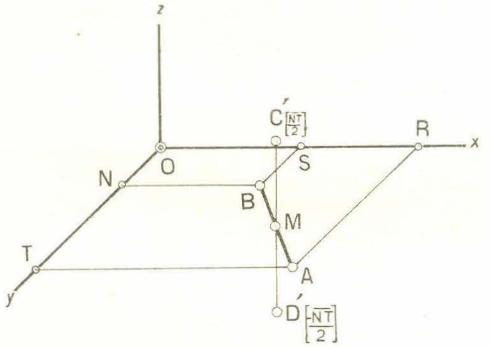

Fig. 20

Les côtes de C′ et D′ sont, numériquement, $\frac{Y_1 - Y_2}{2} = \frac{\overline{NT}}{2}$ (N et T étant les points de l'axe OY, d'abscisses Y_1 et Y_2).

Les points C et D sont, dans ce cas, dits «conjugués».

62. Sî l'on pose

$$x_3 = a + bi \qquad y_3 = c + di$$
$$x_4 = a - bi \qquad y_4 = c - di$$

on tire

$$x_1 = X_1 = a + b \qquad y_1 = Y_1 = c + d$$
$$x_2 = X_2 = a - b \qquad y_2 = Y_2 = c - d.$$

63. Si A et B étant dans le plan de base, λ a la forme $s + ti$, on trouve aisément que les points C′ et D′ sont hors de ce plan : dans celui qui lui est perpendiculaire par le droite AB.

64. Par exemple si l'on a,

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 5, \qquad \lambda = 1 + 7i$$
$$y_1 = 2, \qquad y_2 = 6,$$

on obtient

$$x_3 = \frac{3 + (1 + 7i)\,5}{1 + (1 + 7i)} = \frac{8 + 35i}{2 + 7i} = \frac{261 + 14i}{53} = 4\,\frac{99}{54} + \frac{14}{53}\,i;$$

$$x_4 = 5 - \frac{2}{7}\,i$$

$$y_3 = 5\,\frac{45}{53} + \frac{98}{53}\,i; \qquad\qquad y_4 = 6 - \frac{4}{7}\,i.$$

De sorte que D′ appartient à la perpendiculaire a π tracée par B, et il se trouve a une distance de π ègale a $-\frac{2}{7}$ unités; quant a sa côte, elle est de $-\frac{4}{7}$ unités (fig. 21).

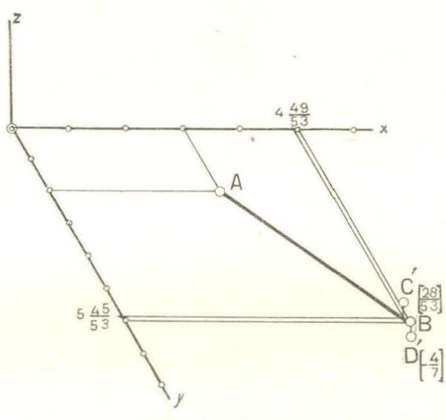

Fig. 21

65. D'une façon générale on trouve, λ étant le «diplet» $s + ti$, et assignant a A et B les coordonnées

$$x_1 = X_1 + Z_1 i,\; y_1 = Y_1 + V_1 i; \qquad x_2 = X_2 + Z_2 i,\; y_2 = Y_2 + V_2 i,$$

que les coordonnées de leurs conjugués harmoniques sont :

$$X_{3,4} = \frac{(1 \pm s)(X_1 \pm sX_2) \pm t(\pm X_2 t + Z_1 - Z_2)}{(1 \pm s)^2 + t^2} +$$
$$+ \frac{\pm t(X_2 - X_1) + (1 \pm s)(Z_1 \pm sZ_2) + t^2 Z_2}{(1 \pm s)^2 + t^2}\,i,$$

$$Y_{3,4} = \frac{(1 \pm s)(Y_1 \pm sY_2) \pm t(\pm Y_2 t + V_1 - V_2)}{(1 \pm s)^2 + t^2} +$$
$$+ \frac{\pm t(Y_2 - Y_1) + (1 \pm s)(V_1 \pm sV_2) + t^2 V_2}{(1 \pm s)^2 + t^2} i,$$

le signe + correspond au point C (x_3, y_3), et le signe — au point D (x_4, y_4).

66. On pourrait se demander quels sont les cas pour les quels l'un ou l'autre (ou les deux a la fois) des points C et D appartiendront au plan de base. Il faudrait alors satisfaire a l'un ou l'autre (ou aux deux a la fois), des systèmes (a) et (b) suivants :

$$\begin{cases} t(X_2 - X_1) + (1 + s)(Z_1 + sZ_2) + t^2 Z_2 = 0 \\ t(Y_2 - Y_1) + (1 + s)(V_1 + sV_2) + t^2 V_2 = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} (s^2 + t^2) Z_2 + s(Z_1 + Z_2) + t(X_1 - X_2) + Z_1 = 0 \\ (s^2 + t^2) V_2 + s(V_1 + V_2) + t(Y_1 - Y_2) + V_1 = 0 \end{cases} \qquad (a)$$

et

$$\begin{cases} (s^2 + t^2) Z_2 - s(Z_1 + Z_2) - t(X_1 - X_2) + Z_1 = 0 \\ (s^2 + t^2) V_2 - s(V_1 + V_2) - t(Y_1 - Y_2) + V_1 = 0. \end{cases} \qquad (b)$$

Les solutions algébriques (ou «réelles») en t et s de (a), fournissent une valeur de λ pour lequelle le point C appartient au plan de base. Par rapport a deux axes Ot et Os, ces systèmes (a) où (b) représentent deux circonférences, de sorte qu'il ne pourrait y avoir, tout au plus, que deux solutions; a moins que les deux équations fussent identiques, ce qui exige que l'on ait :

$$\frac{Z_1}{V_1} = \frac{Z_2}{V_2} = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}. \qquad (c)$$

Si celà a lieu pour le système (a), il en sera de même pour le système (b), de sorte que nous aurons un système total de deux équations qui fourniront un valeur a s et une autre a t pour lesquelles les points C et D appartiendront au plan de base. Mais si on ne désire que le fait se produise pour un seul des points C ou D, nous aurons, si (c) a lieu, une infinité de valeurs de λ pour lesquelles C ou D appartiendront a π. Par exemple, si les coordonnées de A et de B étaient :

$$x_1 = \frac{1}{4}(9 - i), \quad y_1 = \frac{1}{4}(19 + i); \quad x_2 = \frac{1}{2}(4 + i), \quad y_2 = \frac{1}{2}(10 - i),$$

le condition (c) étant ici realisée, le système des quatre équations (a) et (b) est satisfait pour les valeurs

$$s = -\frac{1}{2}, \qquad t = -\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire pour

$$\lambda = -\frac{1+i}{2},$$

qui donnent, pour les coordonnées de C et D, les valeurs

$$x_3 = 3,, \ y_3 = 4; \qquad x_4 = 2, \ y_4 = 5.$$

Nous avons, du reste, que si deux des quatre points appartiennent au plan de base, le lieu représentatif du système linéaire auquel ces

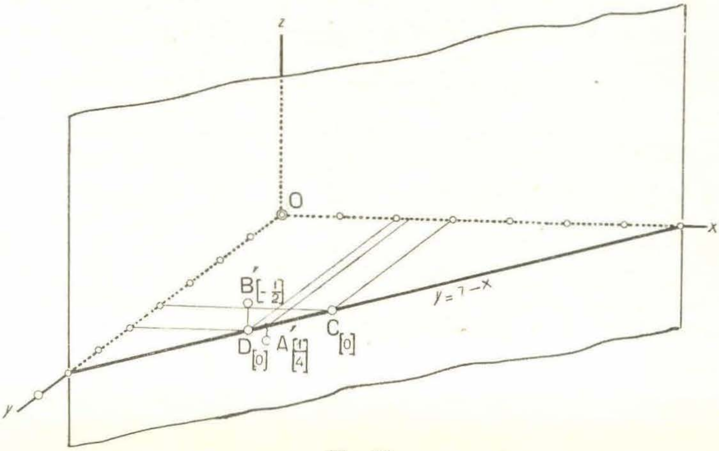

Fig. 22

quatre points appartiennent, est un plan côté perpendiculaire a celui de base (n° 43). Dans l'exemple numérique que nous venons de considerer, ce plan passe par le droite de π dont l'équation est

$$y = 7 - x \text{ (fig. 22)}.$$

67. Pour que les systèmes (a) et (b) fussent idéntiques, sans que λ soit nul ($s = t = 0$), il faudrait, comme un peu d'attention le fait voir, que l'on eut

$$Z_1 + Z_2 = X_2 - X_1 = Y_1 + Y_2 = V_1 - V_2 = 0. \qquad (d)$$

Les points A et B seraient alors *conjugués,* ce qui veut dire que leurs coordonnées seraient du type

$$x_1 = a + bi \qquad x_2 = a - bi \qquad y_1 = c + di \qquad y_2 = c - di$$

et les quatre équations (a) et (b) se reduiraient a la condition

$$s^2 + t^2 = 1$$

qui serait satisfaite pour toutes les valeurs de λ dont le module serait ± 1.

68. On pourrait se poser plusieurs problèmes relatifs a ces questions. Par exemple, si l'on a $X + Y = 0$ le lieu est le plan passant par l'axe bisecteur du 2° et 4° dièdre. On peut envisager la condition $Z + V = 0$. Les coordonnées des points A et B étant toujours $(X_1 + Z_1 i, Y_1 + V_1 i)$; $(X_2 + Y_2 i, Y_2 + V_2 i)$ ¿quelles sont les points conjugués harmoniques des prmiers pour lesquels on a $Z_3 + V_3 = Z_4 + V_4 = 0$?

En établissant cette condition après avoir, comme plus haut, écrit les valeurs de Z_3, V_3, Z_4, V_4 et $\lambda = r + st$, on obtient le système

$$(s^2 + t^2)(Z_2 + V_2) + Z_1 + V_1 = 0$$

$$s(Z_1 + Z_2 + V_1 + V_2) = t(X_1 - X_2 + Y_1 - Y_2)$$

lequel, une fois résolu, donne :

$$\left.\begin{aligned} s &= \pm (X_1 - X_2 + Y_1 - Y_2) \times \\ &\sqrt{\frac{-(Z_1 + V_1)}{(Z_2 + V_2)[(X_1 - X_2 + Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2 + V_1 - V_2)^2]}} \\ t &= \pm (Z_1 + Z_2 + V_1 + V_2) \times \\ &\sqrt{\frac{-(Z_1 + V_1)}{(Z_2 + V_2)[(X_1 - X_2 + Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2 + V_1 - V_2)^2]}}. \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

On voit, tout d'abord, que pour que s et t soit du nature algébrique (réelle) comme le problème l'exige, il faut que $Z_1 + V_1$ et $Z_2 + V_2$ aient signes contraires; il y aura alors deux solutions.

Si A et B appartiennent au plan de base, c'est-à-dire si $Z_1 = Z_2 = V_1 = V_2 = 0$, le valeur de t est nulle et celle de s prend la forme indéterminée; λ est, par conséquent, un nombre «réel» quelconque. Si l'on avait, au surplus, $X_1 - X_2 + Y_1 - Y_2 = 0$, c'est-à-dire si le droite AB de π était paralèlle a la bissectrice du 2°-4° angle $\left(\widehat{XOY'}, \widehat{X'OY}\right)$ s et t auraient la forme indéterminée. N'importe qu'elle valeur de λ satisfaira au problème, chose qui, du reste, peut être très facilement constatée d'une manière directe. Par exemple, si l'on avait :

$$x_1 = 3, y_1 = 8; \qquad x_2 = 5, y_2 = 6; \qquad \lambda = 7 + 5i$$

on obtiendrait

$$x_3 = 4\frac{73}{89} + \frac{10}{89}i, \qquad y_3 = 6\frac{16}{89} - \frac{10}{89}i,$$

$$x_4 = 5\frac{12}{61} - \frac{10}{61}i, \qquad y_4 = 5\frac{49}{61} + \frac{10}{61}i \text{ (fig. 23).}$$

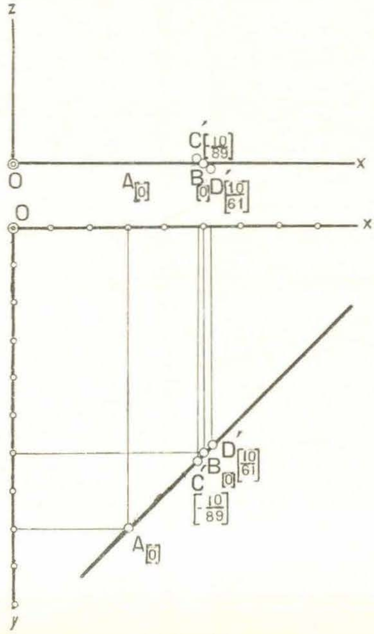

Fig. 23

69. Si A et B n'appartiennent pas a π, tout en ayant $X_1 - X_2 + Y_1 - Y_2 = 0$, s serait nul et t aurait une valeur determinée. Si la somme $Z_1 + Z_2 + V_1 + V_2$ était nulle, t serait nul et s aurait une valeur determinée. Si seulement A (ou B) appartenait a π, on aurait $Z_1 = V_1 = 0$ (où $Z_2 = V_2 = 0$) et alors s, t et λ s'annuleraient. Les point C et D coïncideraient avec A (ou B) (n° 57).

70. Voici, pour terminer, un exemple numérique du cas général. Soit :

$$x_1 = 2,\ y_1 = 3 + 2i; \qquad x_2 = 5,\ y_2 = 4 - i.$$

Pour déduire λ du système (e) il faut y remplacer X_1, Y_1, Z_1, V_1, X_2, Y_2 Z_2, V_2, respectivement par 2, 3, 0, 2, 5, 4, 0, — 1, on obtient sans difficulté :

$$s = \pm (1+3)\sqrt{\frac{2}{1(1+16)}} = \pm 4\sqrt{\frac{2}{17}}$$

$$t = \mp\sqrt{\frac{2}{17}}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{2}{17}}\,(4-i).$$

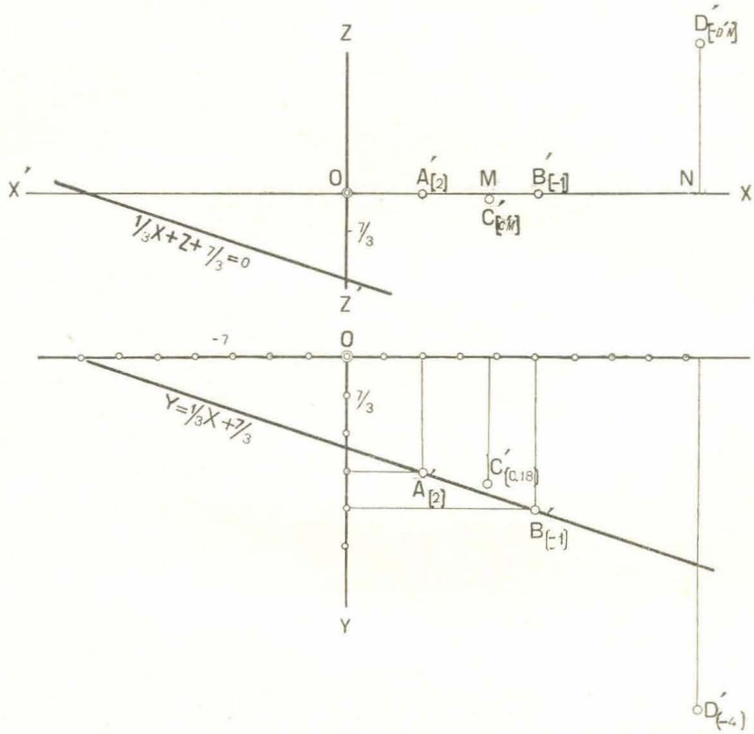

Fig. 24

Pour x_3, y_3; x_4, y_4 il résulte :

$$\begin{cases} x_3 = 3.76112 - \dfrac{3\sqrt{2:17}}{3+8\sqrt{2:17}}\, i = 3.76112 - 0.179i \\ y_3 = 3.40788 = 0.179i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 9.35888 + \dfrac{3\sqrt{2:17}}{3-8\sqrt{2:17}}\, i = 9.35888 + 4.002i \\ y_4 = 9.47212 - 4.002i \end{cases}$$

La fonction linéaire a laquelle appartiennent les quatre points est :

$$y = \left(\frac{1}{3} - i\right)x + \left(\frac{7}{3} + 4i\right),$$

elle est représentée par un plan côté qui a pour équation

$$Y = \frac{1}{3}X + Z + \frac{7}{3},$$

et dont la côte, V, d'un point de coordonnées X, Z, est :

$$V = -X + \frac{1}{3}Z + 4.$$

Le plan coupe les axes OX, OY, OZ, aux distances $-7, +\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}$ unités de longueur.

La trace dans le plan de base, a pour équation

$$Y = \frac{1}{3}X + \frac{7}{3},$$

et le côte d'un point, de cette base, d'abscisse X est

$$V = -X + 4.$$

La figure 24 est une représentation des points en question d'après la méthode de Monge.

c) Rapport equianharmonique

71. Sa valeur est

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1-\sqrt{3}i}{3} \text{ (1)}.$$

(1) Comme il est bien su, les 24 permutations que l'on obtient en faisant varier l'ordre des quatre points A, B, C, D, ne fournit, en réalité, que six rapport anharmoniques différents. Si une de ces valeurs es indiquée par ρ, les autres cinq sont alors $\frac{1}{\rho}$, $1-\rho$, $\frac{1}{1-\rho}$, $\frac{\rho-1}{\rho}$, $\frac{\rho}{\rho-1}$. Si l'on cherche les conditions d'égalité de deux de ces six valeurs, on ne trouve que trois dispositions de points : 1° Coïncidence de C et D, soit $\lambda_1 = \lambda_2$, $\rho = 1$; il n'y alors que trois valeurs pour les relations anharmoniques, a savoir : 1, 0, ∞ ; 2° Le cas du rapport harmonique qui correspond a $\rho = -1$, le six rapports se réduirent au trois -1, 2, $^1/_2$. Les deux cas précédents correspondent a $\rho = \frac{1}{\rho}$. Le troisième cas correspond a $\rho = \frac{1}{1-\rho}$, soit à $\rho^2 - \rho + 1 = 0$, qui donnent les valeurs $\rho = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, c'est-à-dire que ρ est une ou l'autre des deux racines cubiques non réelles (non algébriques au sens strict) du nombre vectoriel -1. Pour une de ces deux valeurs du rapport anhar-

Si A et B appartiennent au plan de base, et λ_1 est «réel», λ_2 est alors vectoriel a deux unités puisque nous devons avoir

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}.$$

Si, donc, C appartient aussi au plan de base, D doit se trouver hors de ce plan.

Par exemple, soit :

$$x_1 = 2,\ y_1 = 3; \qquad x_2 = 5,\ y_2 = 8; \qquad \lambda = 1 \text{ (fig. 25).}$$

C est le point milieu des segment AB, et les coordonnées de D, sont :

$$x_4 = \frac{2 + \frac{1 \mp \sqrt{3}\, i}{2} 5}{1 + \frac{1 \mp \sqrt{3}\, i}{2}} = \frac{1}{2}(7 \mp \sqrt{3}\, i)$$

$$y_4 = \frac{1}{6}(33 \mp 5\sqrt{3}\, i).$$

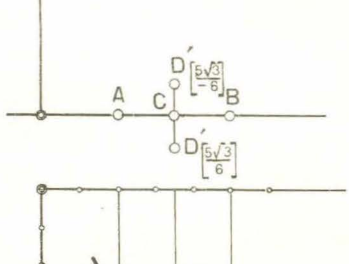

Fig. 25

72. Supposons maintenant que A et B aient pour coordonnées

$$x_1 = X_1 + Z_1 i \qquad x_2 = X_2 + Z_2 i$$

$$y_1 = Y_1 + V_1 i \qquad y_2 = Y_2 + V_2 i.$$

La valeur $\lambda_1 = s + ti$ détermine un point C qui n'appartiendra pas, en général, au plan de base; mais qui, pour certaine valeur de λ_1 pourrait lui appartenir. Il suffisa de donner a s et a t les valeurs qui satisfont au système (a) du n° 66. Une fois λ_1

monique, deux de autres cinq lui sont égales, et les trois restantes sont égales a sa valeur conjuguée. Il n'y a donc, dans ce cas spécial, que deux groupes de trois valeurs égales a savoir, l'une à $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$, l'autre à $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$. C'est ce qui fait ce cas si intéressant surtout dans la théorie des équations de troisième en de quatrième degrè. (Voir notre article *Sobre ecuaciones de tercero y cuarto grados*, dans *Revista matemática*, publiée par la «Sociedad Matemática Argentina», février 1926, page 403 et suivantes.)

déterminé, le quatrième point D, qui se trouve avec les précédents en rapport equianharmonique, correspondra a une valeur λ_2 telle que

$$\lambda_2 = (s + ti)\frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \frac{s \pm t\sqrt{3}}{2} + \frac{t \mp \sqrt{3}\,s}{2}\,i = s' + t'i.$$

Pour que D appartienne aussi au plan de base, il faudrait que s' et t' satisfissent, également, a ce système (a) en y remplaçant s et t par s' et t'; mais comme il résulte que

$$s'^2 + t'^2 = s^2 + t^2$$

il faudrait que s et t satisfissent au système :

$$\left.\begin{aligned}(s^2 + t^2)\,Z_2 + \left(\frac{s \pm t\sqrt{3}}{2}\right)(Z_1 + Z_2) + \frac{t \mp \sqrt{3}s}{2}(X_1 - X_2) + Z_1 = 0\\ (s^2 + t^2)\,V_2 + \left(\frac{s \pm t\sqrt{3}}{2}\right)(V_1 + V_2) + \frac{t \mp \sqrt{3}s}{2}(Y_1 - Y_2) + V_1 = 0\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

ce qui n'arrivera généralement pas. Mais si les deux équations du système (a) remplissaient le condition (c) (n° 66), les deux équations (a) et, par tant (f), seraient idéntiques et on pourrait obtenir deux valeurs de s et t et, par tant, de λ_1 et λ_2, pour lesquelles les points C et D appartiendraient au plan de base.

73. Si la condition (d) (n° 67) était remplie, c'est-à-dire si A et B étaient conjuguées, les deux équations (a) seraient identiques aux deux (f) et le quatre se reduiraient a la condition unique

$$s^2 + t^2 = 1,$$

Voici deux exemples numériques :

74.
$$x_1 = \frac{1}{4}(9 - i) \qquad x_2 = \frac{1}{2}(4 + i)$$

$$y_1 = \frac{1}{4}(19 + i) \qquad y_2 = \frac{1}{2}(10 - i),$$

coordonnées qui remplissent la condition (c).

On obtient les solutions :

$$\left.\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2} \\ t &= -\frac{1}{2}\end{aligned}\right. \quad \therefore \quad \lambda_1 = -\frac{1+i}{2};$$

$$s' = \frac{-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\therefore \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{4}\left[1 \pm \sqrt{3} + (1 \mp \sqrt{3})i\right],$$

$$t' = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

qui fournissent deux points C et D en rapport equianharmonique avec les premiers et qui appartiennent au plan de base.

75. Soient les points conjugués A et B de coordonnées (fig. 26) :

$$x_1 = 2 + 5i \qquad x_2 = 2 - 5i$$

$$y_1 = 3 + 8i \qquad y_2 = 3 - 8i.$$

Posons $\lambda_1 = 1$; il en résultera

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3}\, i).$$

Les coordonnées de D, calculées par ces données sont :

$$x_4 = 2 \pm \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

$$y_4 = 3 \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Et celles de C

$$x_3 = 2$$

$$y_3 = 3.$$

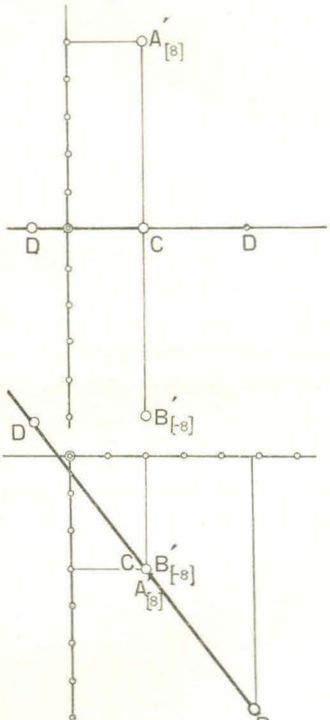

Fig. 26

76. Du reste, le cas des points conjugués peut être traité directement ainsi :

Soient

$$x_1 = a + bi \qquad x_2 = a - bi$$

$$y_1 = c + di \qquad y_2 = c - di$$

les coordonnées des points en question. Celles des points C et D en rapport equianharmonique avec les premiers, sont :

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda_1} = a + b\,\frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1}\,i \qquad x_4 = a + b\,\frac{1 - \lambda_2}{1 + \lambda_2}\,i,$$

$$y_3 = c + d\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}i \qquad\qquad y_4 = c + d\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2}i,$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}.$$

Pour que ces points appartiennent au plan de base, il faut que

$$\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}i = m, \qquad \frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2} = n,$$

m et n étant algébriques («réels»).

Cherchons a satisfaire cette condition.

On a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(i-m)(i+n)}{(i+m)(i-n)} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Ce système, resolu en n, donne

$$n = \frac{2m \pm (m^2-1)\sqrt{3}}{3 + m^2 \pm 2m\sqrt{3}}. \qquad (g)$$

On voit donc que si l'on donne a m une valeur algébrique (réelle) on obtient pour n une autre valeur algébrique (et viceversa).

Si $m=0$, $n = \frac{\mp\sqrt{3}}{3}$; dans ce cas, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3}i)$ le point C coïncide avec celui qui a pour coordonnées $x_3 = a$, $y_3 = c$.

Ainsi, dans l'exemple numérique antérieur, nous aurions pour cette valeur de m

$$x_1 = 2+5i; \quad x_2 = 2-5i; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 2 \pm 5\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$y_1 = 3+8i; \quad y_2 = 3-8i; \quad y_3 = 3; \quad y_4 = 3 \pm 8\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Si dans ce même exemple on prenait $s = \frac{1}{3}$, on aurait $t = \pm\sqrt{1-s^2}$ $= \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$. La valeur de λ_1 est $\frac{1}{3}(1 \pm 2\sqrt{2}\,i)$, et celle de λ_2 est $\frac{1}{6}\left[1 + 2\sqrt{6} \pm (2\sqrt{2} \mp \sqrt{3})i\right]$. Et l'on obtient aisément, pour C, les coordonnées

$$x_3 = 2 \pm 5\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad y_3 = 3 \pm 4\sqrt{2}.$$

Et il conviendra, alors, de calculer x_1, y_1 au moyen de la formule (g) en y posant $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ On obtient pour n, les quatre valeurs suivantes

$$n = \frac{\pm 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{5}; \qquad n = \frac{\pm 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5},$$

et, conséquemment,

$$x_1 = 2 + 5n = 2 + 4\sqrt{2} \pm 3\sqrt{3}; \qquad x_1 = 2 - 4\sqrt{2} \pm 3\sqrt{3}$$

$$y_1 = 3 + 8n = 3 + \frac{32\sqrt{2} \pm 24\sqrt{3}}{5}; \qquad y_1 = 3 - \frac{32\sqrt{2} \pm 24\sqrt{3}}{5}.$$

d) La formule de Laguerre

77. Nous terminerons ce chapitre en faisant une allusion a la formule de Laguerre qui lie l'angle (dd') de deux droites se coupant au point O, avec le rapport anharmonique déterminé par ces deux droites avec les deux isotropes OI et OJ, qui passent par O. Cette formule sur laquelle nous reviendrons plus loin, est, comme l'on sait :

$$\sphericalangle\,(dd') = \frac{1}{2i}\log\,(d', d, \mathrm{OI}, \mathrm{OJ}).$$

78. D'après ce qui a été observé au numero 43, les quatre droites en question, si l'on ne considère que des valeurs «réelles» des abscisses, l'origine étant en O, et les équations des droites d et d' étant

$$y = \mathrm{M}x, \qquad y = \mathrm{M}'x$$

sont graphiquement représentées par quatre droites de l'espace, a savoir : les deux droites considérées d et d' du plan de base, et les deux isotropes, c'est-à-dire les deux bissectrices des angles XOZ.

Si l'on coupe ce faisceau de quatre droites par la droite $x = 1$, qui est représentée par le plan parallèle a YOZ a la distance unitaire, on obtient quatre points tous d'abscisses egalés a l'unité, et dont les ordonnées sont évidemment pour valeur m, m', $+ i$, $- i$. Le rapport anharmonique de ces quatre points, qui est, par définition, celui du faisceau des quatre droites [1] est (voyez n° 52) :

$$\frac{m' - i}{m' + i} : \frac{m - i}{m + i}.$$

[1] Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha + \lambda'\beta = 0$ les équations des quatre droites du faisceau. Considérons quatre points A, B, C, D d'un même droite. Soient

Et comme d et d' appartiennent au plan de base, si α est la valeur de l'angle qu'elles forment, on a, sans nécessité d'étendre le notion d'angle,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{m' - m}{1 + mm'},$$

donc, en remplaçant m' et m par leur valeur en fonction de α dans l'expressions du rapport anharmonique en question, il en résulte que, en effet, cette expression peut symboliquement prendre la forme

$$e^{2i\,(d,\,d')}$$

en tenant compte des développements en séries convergentes de m, m' et e.

79. Dans le cas considéré, une circunférence de rayon «réel» est, graphiquement, représentée comme l'indique la figure 3 (chapitre I). Or, on sait, par voie élémentaire, que si, d'un point variable d'une circonférence on projette deux points fixes de la dite appartenant aussi au plan de base, l'angle (l'aigu ou l'obtus) des deux droites projectantes est constant; mais on sait également par les propiétés homographiques des coniques, que le rapport anharmonique du faisceau constitué par les deux projectantes et les deux isotropes qui passant par

x, y, t les coordonnées homogènes de A, $x', y'\ t'$, celles de B; $x + kx'$, $y + ky'$, $t + kt'$, celles de C et $x + k'x'$, $y + k'y'$, $t + k't'$, celle de D. Si A appartient a la droite $\alpha = 0$, et B a la droite $\beta = 0$, C à $\alpha + \lambda\beta = 0$ et D $\alpha + \lambda'\beta = 0$ et si, par l'expression α_P et β_P on designe ce que deviennent les polynomes $\alpha = 0$, $\beta = 0$ quand on y remplace x, z, t, par les coordonnées du point P, nous aurons, puisque A appartient à $\alpha = 0$, et B à $\beta = 0$, que

$$\alpha_A = 0, \qquad \beta_B = 0,$$

et comme C appartient à $\alpha + \lambda\beta = 0$ il en résultera en y introduisant les coordonnées de C

$$\alpha_A + k\alpha_B + \lambda\,(\beta_A + k\beta_B) = k\alpha_B + \lambda\beta_A = 0$$

et de même pour D

$$k'\alpha_B + \lambda'\beta_A = 0$$

d'ou il s'ensuit que

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{k}{k'},$$

c'est-à-dire que $\frac{k}{k'}$ est constant pour les quatre points considérés toute droite qui coupe les quatre droites du faisceau : c'est le rapport anharmonique du faisceau, qui est égal, ainsi, a celui des quatre points qu'il détermine sur une sécante quelconque.

leur point d'intersection, est lui aussi constant (1). Il faut donc que, entre cet angle et ce rapport anharmonique il y ait une relation : c'est celle trouvée par Laguerre. Notre représentation graphique peut, donc, être utile pour mieux comprendre ou saisir le sens de cette formule quand les abscisses sont réelles. Le cas général sera traité plus loin.

(1) Soient M, N, P, Q quatre points d'une conique; $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des quatre droites MN, NP, PQ, QM; l'équation de la conique peut s'écrire $\beta\delta = \lambda . \alpha\gamma$, car cette équation est bien du deuxième degré et comme elle est satisfaite par la condition, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, représentative du point M, la conique en question contient donc bien M; et on verrait de même qu'elle contient aussi N, P, Q; d'ailleurs, pour une valeur convenable de λ, on peut la faire passer par un cinquième point de la conique donnée. Mais cette équation est saisfaite par l'une et l'autre des deux conditions $\alpha = k\beta$, $\delta = k\gamma$ qui représentent, respectivement, deux droites passant, l'une par M, l'autre par P; ces droites doivent donc se couper en un point de la conique en question, et comme la valeur du rapport anharmonique de quatre de ces droites passant par M, ne dépend que des valeurs correspondantes de k, ce rapport résulte égal a celui des quatre droites qui leur correspondent passant par P. Il en découle la propiété rapellée, laquelle, du reste, subsiste quand même les quantités figurant dans les équations seraiet en partie ou totalement vectorielles a deux unités capitales. La présente note — ainsi que les autres analogues données ou a donner — répondent, comme nous l'avons prevenue dès le début de ce travail, a notre ferme propos de vulgariser toutes les questions qui se présentent en passant.